



TITLE:

# FMCのスケジューリング問題(待ち行列理論とその周辺)

AUTHOR(S):

森, 雅夫; 嶽, 昌浩

---

CITATION:

森, 雅夫 ...[et al]. FMCのスケジューリング問題(待ち行列理論とその周辺). 数理解析研究所講究録 1986, 596: 71-85

ISSUE DATE:

1986-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99552>

RIGHT:

## F M C の ス ケ ジ ュ ー リ ン グ 問 題

東京工業大学 工学部 経営工学科

森 雅 夫 (M O R I M a s a o)

嶽 昌 浩 (D A K E M a s a h i r o)

## 1. はじめに

本報告では、F M C において複数種の部品をそれぞれの需要に合わせて生産していくときのスケジューリング問題について取り扱う。F M C とは、一工程で多品種を加工できる高度に自動化された生産システムのことであり、要求される品種の多様化に伴い、近年多くの工場においてその導入が行われている。

F M C、あるいは多工程からなる F M S におけるスケジューリング問題を取り扱った研究も多く成されてる。例えば、Schweitzer等(3)は、F M C で加工した部品を下段の専用機に供給するシステムについて、この専用機の生産停止時間にかかるペナルティを最小にするスケジューリング問題を考えている。そこでは、F M C において一つの部品の加工が終了したときの各バッファの在庫量をみることにより次に何を生産するかを決定するセミマルコフ決定過程に問題を定式化して解を求めている。しかし、これらの研究は部品の加工前に必要な段取りを考慮していないものが殆どである。だが、F M C においても段取りは無視できないのが現状であって、これを考慮したスケジューリング問題を取り扱う必要がある。

加工前に必要な段取りには色々なものがあるが、次の2通りに大体分けることができるであろう。

- 1) 各部品個々に必要なもの、
- 2) 加工する品種が変わるごとに必要なもの。

1) の例としては加工する部品の機械への取り付け、及び加工後の取り外しなど、2) の例としては加工に必要な工具の着脱、及び工具倉庫への運搬などが挙げられる。

1) の段取り時間については、それを加工時間に含めて考えることができるので、従来の方法で解いても問題はないであろう。しかし、2) の段取りは、前に加工していた部品の種類によって必要なとき、必要でないときがあるので、従来の方法ではこれに対応できない。そこで、FMCにおける多品種生産において、2) のタイプの段取りを考慮してモデルを組むことは重要な事となってくる。

2) のタイプの段取りは、同じ部品を連続して加工することによりその回数を減らすことができるので、同種の部品を幾つか集めて生産する形を採ることによる段取り時間、段取り費用を節約することができる。しかし、一つの品種を連続して加工するとその間は他の品種は生産されないので、その間の需要に対する在庫を持っていなくてはならない。よって、段取り回数が少なくて済むようにスケジュールを組むと在庫費用が増加してしまい、また在庫不足が生じる恐れがある。そこで、スケジュールを組むに当たっては、段取り費用、在庫費用、在庫不足に対するペナルティの和を最小にしようとするのが非常に重要になってくる。本研究においてはFMCにおける多品種生産において、段取り費用、在庫費用、及び在庫不足に対するペナルティを目的関数としたスケジューリング問題を取り扱う。

本来、段取りが必要な一工程多品種生産においては、ロット生産方式が取られてきた。これは各部品に対して要求される生産量を幾つかのロットに分割して、これを段取り替えを行いながら工程に流していく生産方式である。この生産方式を取る場合、各ロットの大きさ(ロットサイズ)を決めることが重要な問題となるわけである。このロットサイズを決めることを考慮したスケジューリング問題はロットサイズ・スケジューリング問題と呼ばれている。

ロットサイズ・スケジューリング問題に対するこれまでの研究では、ロットサイズを連続量として解いているものがほとんどである。これは、段取りの費用に占める割合が大きいため、各ロットサイズも大きくなり、連続量として解いても解として十分使えるからである。

しかし、FMCにおいてはロットサイズが数千個のものから、1、2個のものまで様々な場合がある。これはFMCで加工する部品の種類によるものである。FMCにおいても、部品の構造が比較的簡単であったり、要求される加工の種類が少ない場合や、下段からの需要がある程度まとまって来る場合などには、ロットサイズも比較的大きくなる。このような場合には従来の解法を適用することができるであろう。従来の解法については、文献(1)を見よ。

しかしこれとは逆に、ロットサイズが数個程度の部品を加工する場合は、部品の個数を連続量として考えることには無理がある。むしろこの場合は個別生産に近く、ロットサイズ・スケジューリング問題とは違った解法が必要である。そこで、本稿ではロットサイズが数個であるような問題を確率的なモデルに定式化して、これを解くことを考える。その方法は、Schweitzerの方法を基に、割引のない無限期間のセミマルコフ決定過程でモデルを定式化して解を求めるものである。

計算例においては、加工時間、段取り時間が確定的な場合、指数分布に従う場合の2通りについて行ってみた。

## 2. セミマルコフ決定過程による定式化

### モデルの記述

N種類の部品を一機のFMCで加工して、下段のラインからの需要に供給するシステムを考える(図1参照)。各部品はFMCの前段階に予め用意されているものとし、順次FMCに送られて加工される。加工が終了した部品は直ちに下段ラインに送られる。もし、ラインからの需要に対して供給過剰のときには、バッファに蓄えられる。また、下段のラインから部品の需要が来ているにもかかわらず在庫が無い場合には、その需要は無視されるものとする。すなわち、back-logは行われなくて、在庫不足個数に対してはペナルティを考える。FMCでは同時に一つの部品しか加工できないものとする。このとき、段取り費用、段取り時間がかかるため、在庫費用と段取り費用、及び在庫不足に掛かるペナルティの和を最小にするようなスケジュール、つまり、(何時、何を、いくつ)造るかというスケジュールを求めることを考える。

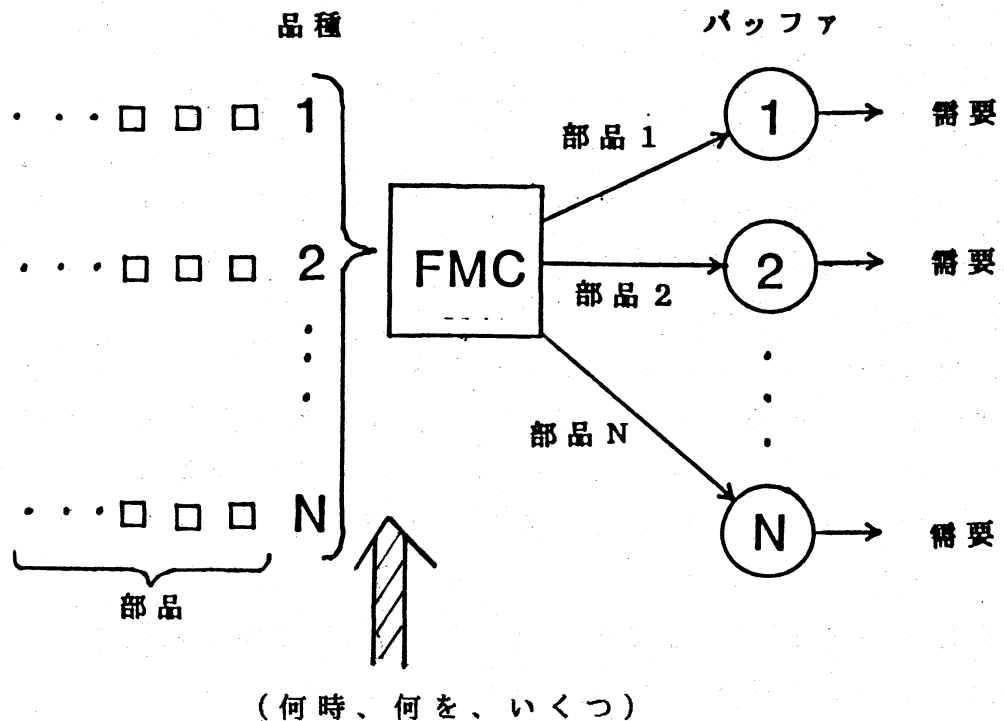


図1 モデルの概念図

本稿では以下の記号を用いる。

#### 記号

- $TR_i$  : 部品  $i$  の需要間隔、
- $TP_i$  : 部品  $i$  の生産時間、
- $TD_i$  : 部品  $i$  の段取り時間、
- $h_i$  : 単位時間当り、部品  $i$  一個の在庫にかかる在庫費用、
- $M_i$  : 部品  $i$  一個の不足にかかるペナルティ、
- $S_i$  : 部品  $i$  の段取り費用。

また、部品  $i$  の需要はパラメータ  $r_i$  のポアソン過程に従って発生するものとする。

いま、ある時点における各バッファの在庫量ベクトルを

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_N) \quad (1)$$

とおく。また、今まで生産していた部品の種類を  $k$  とおき、システムの状態として

$$\text{状態 } \bar{u} = (u, k), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}.$$

を考える。そしてこの状態  $u$  をみて次に何を加工するかを決めていく。このときに選んだ部品の種類を  $d(u, k)$  あるいは  $d$  で表す。すると、ある状態  $\bar{u} = (u, k)$  にいるとき部品  $i$  を生産することを決めると、次の状態への推移時間  $T^d$  (すなわち、部品  $i$  を加工するのに必要な時間) は、

$$T^d = \begin{cases} TP_d & : d(u, k) = k, \\ TP_d + TS_d & : d(u, k) \neq k \end{cases} \quad (2)$$

となるので、 $d(u, k)$  と状態  $\bar{u}$  のみに依存する。また在庫量ベクトル  $u$  は、需要間隔に指数分布を仮定しているのでマルコフ的に変化し、次の状態で、今まで加工していた部品の種類は  $d(u, k)$  となるので、推移後の状態は  $\bar{u} = (u, d)$  となり、これは  $\bar{u}$  と決定  $d(u, k)$  のみに依存することがわかる。

いま、各部品の在庫量には上限があるとしてこれを

$$B = \{B_1, B_2, \dots, B_N\} \quad (3)$$

とおけば、この問題は状態数有限のセミマルコフ決定過程として定式化でき、最適方程式は以下になる。

$$y(\bar{u}) = \min \{ C^d(\bar{u}) - g \cdot \bar{T}^d + \sum_j P(j | \bar{u}, d) \cdot y(\bar{u}^d) \} \quad (4)$$

ただし、

$C^d(\bar{u})$  : 状態  $\bar{u}$  において  $d$  を生産することにしたときの次の決定までの直接期待費用。

$P(j | \bar{u}, d)$  : 状態  $\bar{u}$  において  $d$  を生産することにしたときに、次の決定までに在庫量ベクトルが  $j$  個減少する確率。  
ここで  $j = (j_1, j_2, \dots, j_N)$  である。

$y(\bar{u})$  : 状態  $\bar{u}$  における相対費用。

$g$  : 単位時間当たりの最適期待費用。

$\bar{T}^d$  :  $T^d$  の期待値。

$\bar{u}^d$  : 推移後の状態。

$$\bar{u}^d = (u - j + e^d, d)$$

$e^d$  = d 番目の要素のみが 1 で他は全て 0 である  
N 次元行ベクトル

$A(\bar{u})$  : バッファに余裕がある品種 ( $u_i < B_i$  である品種)

$$A(\bar{u}) = \{i : u_i < B_i, \text{ or } i = 0\}$$

ただし、 $d(u, k) = 0$  のときは、 $T^d$  は最初にいずれかのバッファの在庫がひとつ減るまでの時間とする。すなわち、

$$T^d = \min \{TR_i\} \quad (5)$$

ここで提案した方法では、加工時間、段取り時間には任意の分布を仮定することができるが、ここでは以下の二通りについて計算を行った。

- ① 一定のとき、
- ② それぞれ平均  $1/p_i$ ,  $1/\lambda_i$  の指数分布で与えられたとき。

### 3. 計算方法および計算例

上記の方程式の未知数は  $g$  と  $y(\bar{u})$  で合計  $(N+1) \times \prod_{i=1}^N (B_i + 1) + 1$  個有り、方程式の数は  $y(\bar{u}) = 0$  を加えることにより同じ数だけ存在する。よってこの解は唯ひとつ存在して、そのときの  $d$  が最適な決定である。この方程式は、Value-iteration Scheme (2) を使って繰り返し求めることができる。

以下では、 $N = 2$  および  $N = 3$  のいくつかの場合について計算を行ってみた。

表 1 は各例についての計算時間を示したものである。ここで提案した解法では、品種、バッファの容量が増え、状態の数が急激に増加してしまい、計算時間も莫大なものになってしまう。表 1 は UX700 で行ったものしか載せなかったが、大型コンピュータ HITAC M280H (東京工業大学情報処理センター) で計算した結果では、部

品数 3、バッファの容量 5 個（この場合、状態数は 864）で CPU TIME は 732.56 秒、部品数 3 バッファの容量 6 個（この場合、状態数は 1372）では計算時間オーバー（HITAC M280H の計算時間の制限は 1800 秒）で解が求まらなかった。よって、この解法では、状態数 1000 程度が適用の限度であると思われる。（ただし、プログラムの改良によってある程度は計算時間は改善されるであろう。）

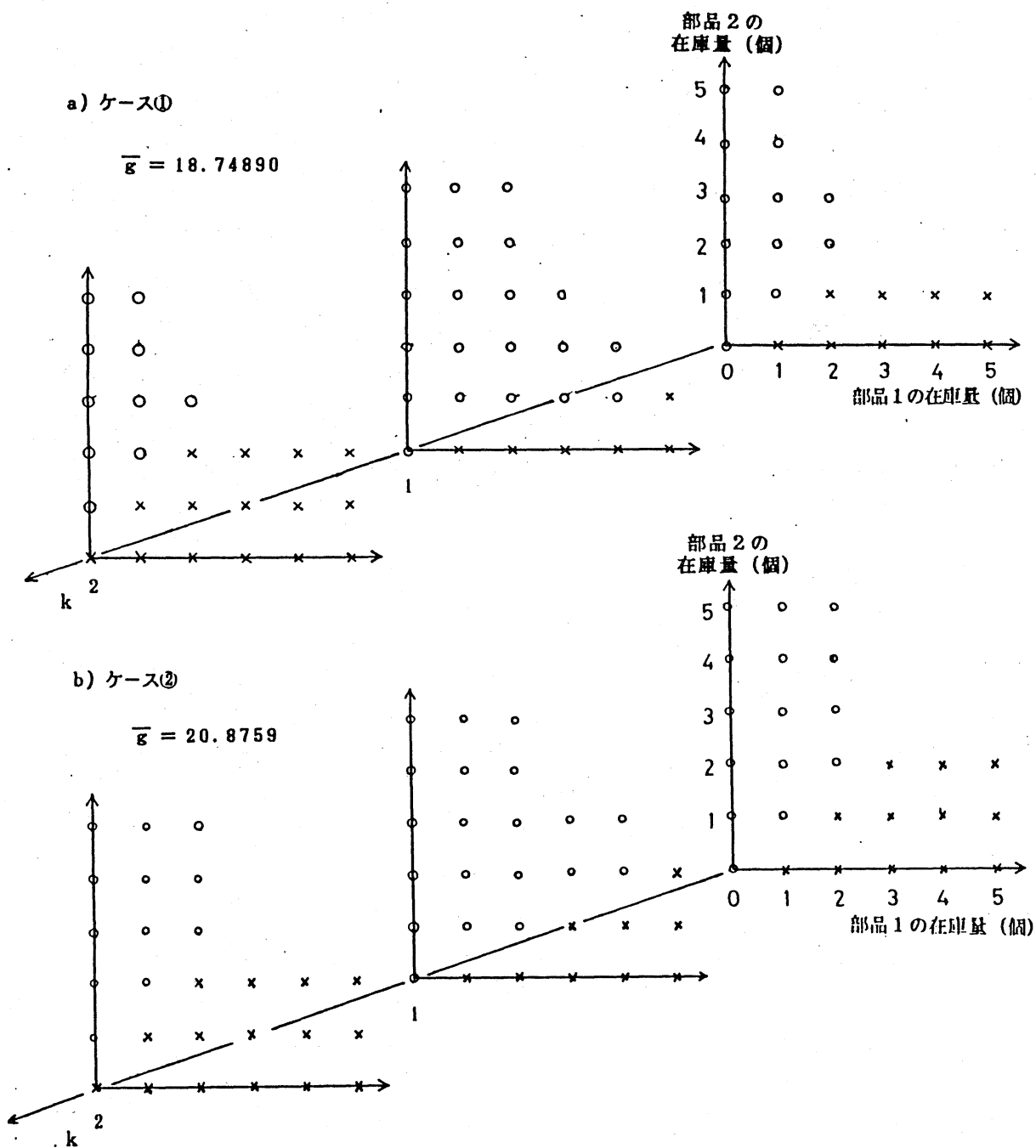
図 2 から図 4 は、 $N = 2$  で、データ 1、2、5 の場合の計算結果を図示したものである。グラフは、各状態にいるときに次に生産する部品の種類を表したものであって、横軸に部品 1 の在庫量、縦軸に部品 2 の在庫量、前方向にその時点まで生産していた部品の種類をとっている。

計算機は UX-700 を使用

	部品数 (個)	バッファ 容量(個)	状態数	CPU time (秒)	
				ケース①	ケース②
データ 1	2	5	108	444.2	285.9
データ 2	2	5	108	591.1	421.3
データ 3	2	5	108	383.2	311.4
データ 4	2	5	108	1286.9	969.7
データ 5	2	5	108	433.3	287.8
データ 6	3	3	256	1532.2	1360.4
データ 7	3	5	864	29114.6	20214.3

表 1 各データの計算時間





データ 1 (N = 2)

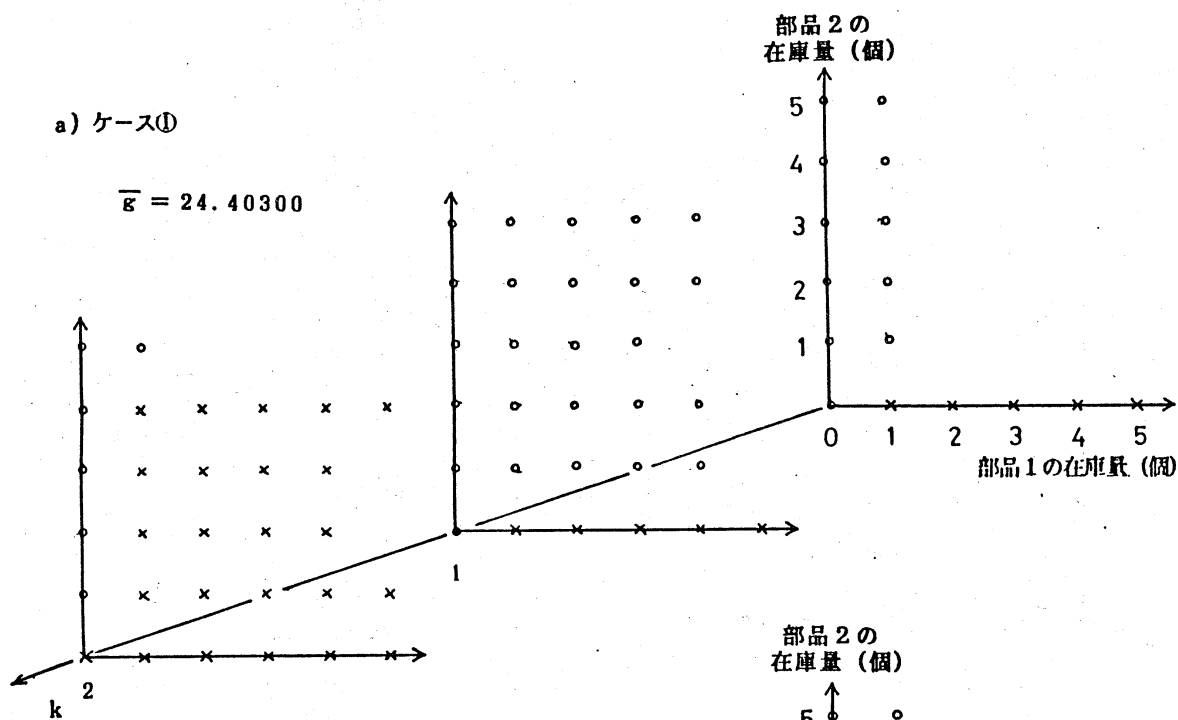
	加工時間	需要間隔	段取り時間	在庫費用	段取り費用	在庫不足PENALTY	バッファ容量
部品 1	0.25	2.0	1.0	2.0/個	10.0/回	100.0/個	5 個
部品 2	0.50	2.0	1.0	2.0/個	10.0/回	100.0/個	5 個

○・・・部品1を加工    ×・・・部品2を加工    無印・・・加工せず

図 2 データ 1 に対する最適解

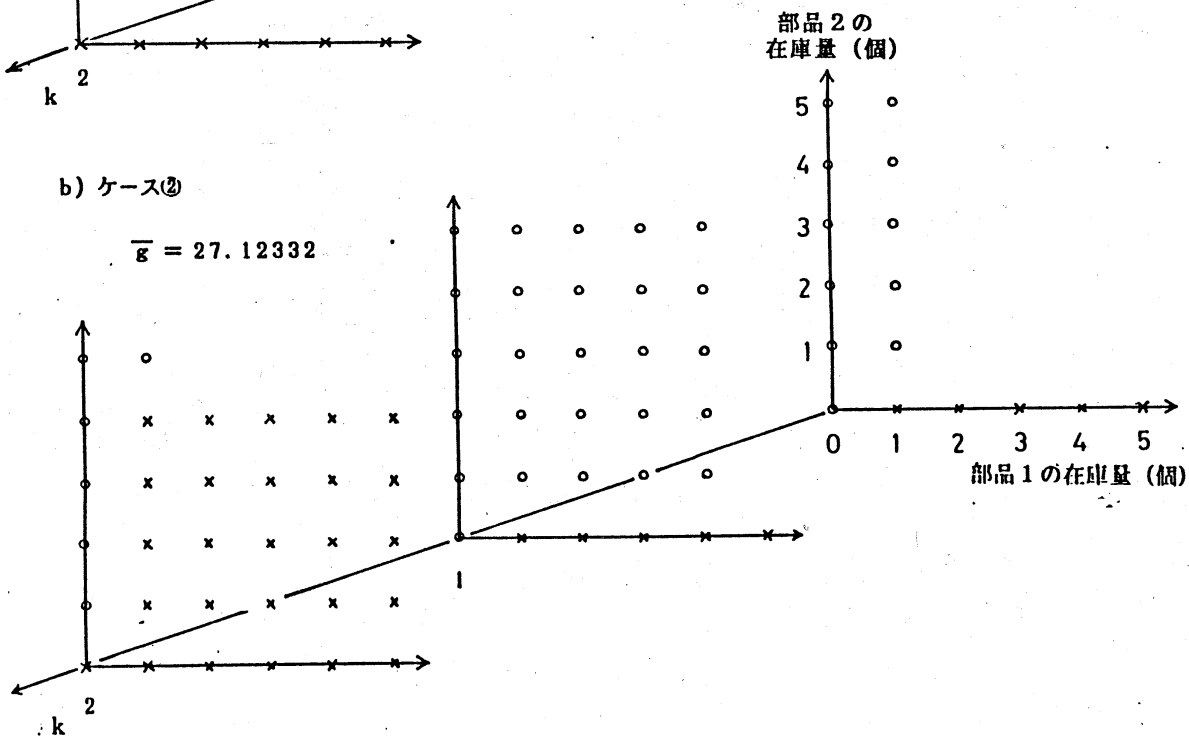
a) ケース①

$$\bar{g} = 24.40300$$



b) ケース②

$$\bar{g} = 27.12332$$

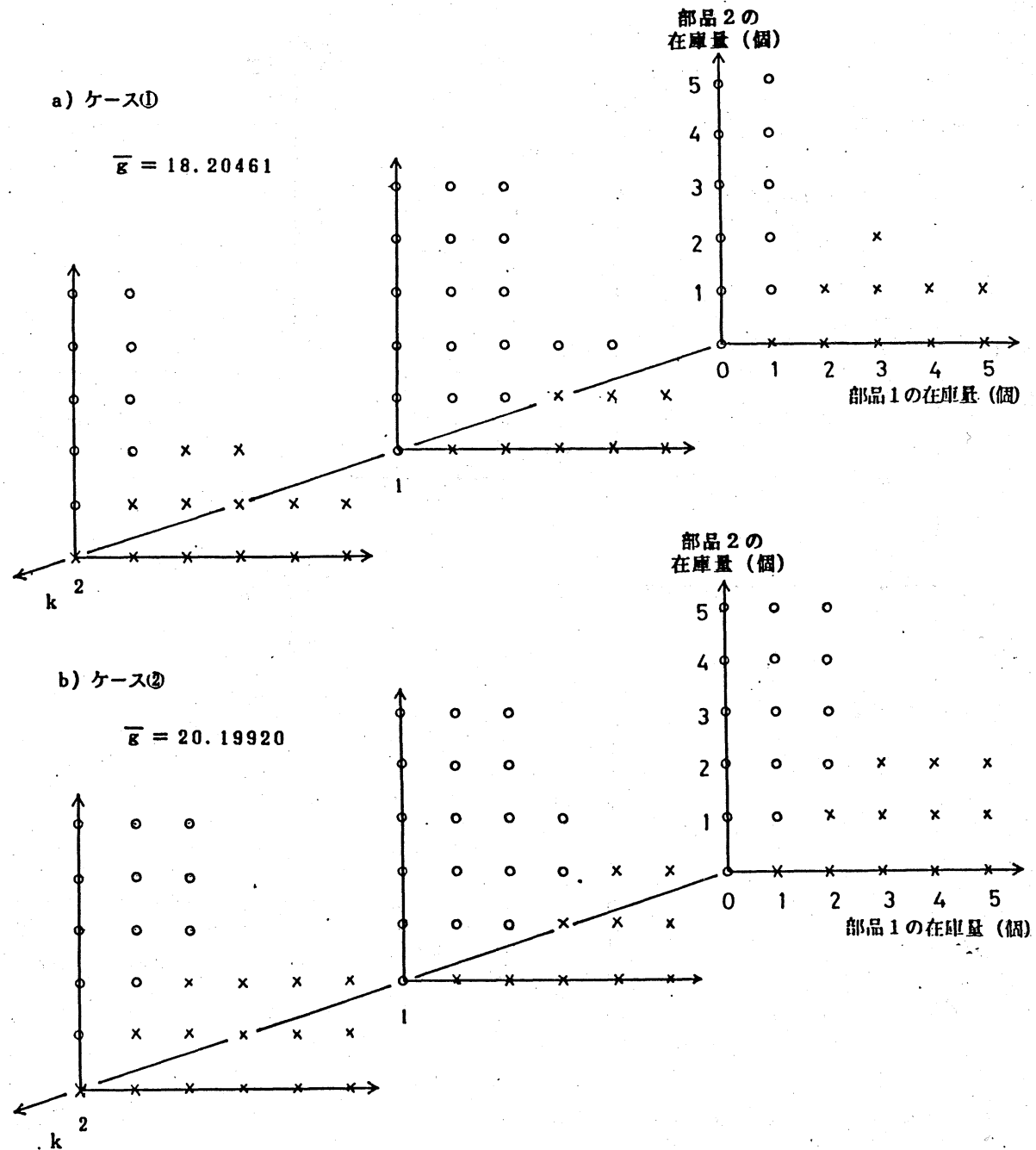


データ 2 (N = 2)

	加工時間	需要間隔	段取り時間	在庫費用	段取り費用	在庫不足PENALTY	バッファ容量
部品 1	0.50	5.0	1.0	1.0/個	50.0/回	100.0/個	5 個
部品 2	0.50	2.0	1.0	1.0/個	50.0/回	100.0/個	5 個

○・・・部品1を加工    ×・・・部品2を加工    無印・・・加工せず

図 3 データ 2 に対する最適解



データ 5 (N = 2)

	加工時間	需要間隔	段取り時間	在庫費用	段取り費用	在庫不足PENALTY	バッファ容量
部品 1	0.25	2.0	1.0	2.0/個	10.0/回	100.0/個	5 個
部品 2	0.50	2.0	1.0	2.0/個	2.0/回	100.0/個	5 個

○・・・部品1を加工    ×・・・部品2を加工    無印・・・加工せず

図 4 データ 5 に対する最適解

まず、グラフ全体について見てみると、以下の二つのことが言えるであろう。

- 1) 決定空間は部品1を生産する領域、部品2を生産する領域、及び何も生産しない領域に分けられている。この、領域の分け方は、部品1の在庫が少なく部品2の在庫が多いときには部品1を生産、逆の場合には部品2を生産、両方とも多いときには何も生産しないほうが良いという直観的な結果と良く合っていることが解る。
- 2) 各段取りの状態  $k$  ごとにグラフを見ると、 $k$  と同じ品種の部品の決定の占める割合が大きくなっている。このことは、段取り費用及び時間を節約することによるもので、同じ部品を連続して加工することによるスケジュールの効果を示したものである。

各データごとに比較してみると、段取り費用、段取り時間による差が顕著である。データ1（図2）とデータ2（図3）を比較してみると、後者は段取り費用が5倍になっているわけであるが、図3のほうが図2に比べて同じ品種を連続して加工しようとする傾向が強く、段取りが要らない場合（すなわち、前に加工していた部品の種類と同じ品種を加工する場合。）には、在庫量がかなり多くなっても生産をしておいて、段取り回数を減少させようとしていることが窺える。

データ2とデータ5（図4）を比較してみると、この場合データ5の段取り時間がデータ2の5倍になっているわけだが、図4では、段取りの状態  $k$  が0のところが大きく図3とは違って、二つの部品の在庫量がかかなり多くとも、部品を加工していこうとしている。これは、 $k$  が0のときに何もつくらない決定を下すということは、それだけFMCの遊休時間が増え生産率が落ちて、在庫不足になりやすくなるわけであるが、段取り時間が長い場合は、それだけで生産率が落ちてしまうので、これをなるべく落とさないようにしている結果だと思われる。

ケース①とケース②を比較してみるとグラフはほとんど変わらないが、平均費用の期待値が、ケース②のほうがケース①よりも大きくなっている。これは、ケース②では生産時間、段取り時間に指数分布を用いたので、これらの値が既知の定数であるケース①に比べてばらつくため、在庫を多く持っておこうとすることによるものと

思われる。実際、グラフにおいてケース①とケース②とで決定が違っている箇所を見てみると、ケース②では加工を行う決定をしているが、ケース①では何も生産しない決定を行っているというものがほとんどである。

しかし、ケース①、ケース②のように両極端な分布を用いても、各状態における決定の違いは僅かであるので、本稿で扱ったモデルは、加工時間、段取り時間の分布に対して頑健性があると言えるだろう。

おわりに

本稿では、FMCにおいて多品種を加工する場合に、段取り費用、在庫費用、及び在庫不足個数に対するペナルティの和の期待値を最小にするようなスケジュールを与える方法を提案した。この方法は、バッファの容量、部品の種類が比較的少ない場合には有効だが、これらが大きくなると状態数が非常に大きくなってしまい、計算不可能になってしまう。よって、これからは状態数が大きくなっても計算可能な解法を求めることが重要な問題となってくるであろう。

また、研究集会の発表の折りには「FMSと待ち行列」について最近の動向を概括したが、紙数の関係で割愛させていただいたことを、ここにお詫びする。

#### 参考文献

- (1) Elmaghraby, S. E.: "The Economic Lot Scheduling Problem Review And Extensions", Manag. Sci., pp. 587-598, Vol. 24, No. 6 (1978)
- (2) Schweitzer, P. J.: "Iterative Solution of the Functional Equations of Undiscounted Markov Renewal Programming", J. Math. Anal. Appl., pp. 495-501, Vol. 34, (1971)
- (3) Seidmann, A., Schweitzer, P. J.: "Part Selection policy for a Flexible Manufacturing Cell Feeding Several Production Lines", IIE Transactions, pp. 355-362, Vol. 16, No. 4, (1984)

## 付 録

直接期待費用  $C^d(\bar{u})$  の計算

直接期待費用、 $C^d(\bar{u})$  は以下のように表わせる。

$$C^d(\bar{u}) = \sum_{i=1}^N C_i^d(\bar{u}) + (1 - \delta_{kd}) \cdot s_d$$

ただし、

$$\delta_{kd} = \begin{cases} 1 & : d \neq k \\ 0 & : d = k \end{cases}$$

$$C_i^d(\bar{u}) = h_i I_i^d(\bar{u}) + M_i \bar{I}_i^d(\bar{u})$$

ここで、 $I_i^d(\bar{u})$ 、 $\bar{I}_i^d(\bar{u})$  はそれぞれ部品  $d$  を生産する間の部品  $i$  の在庫量、及び在庫不足個数の期待値である。これらは各ケースに応じて次のように計算される。

## ケース① 加工および段取り時間が一定のとき

$$I_i^d(\bar{u}) = \frac{1}{2r_i} \{ u_i(u_i + 1) - \exp(-r_i \bar{T}^d) \\ \times \sum_{j=0}^{u_i} \frac{(r_i \bar{T}^d)^j}{j!} (u_i - j)(u_i - j + 1) \}$$

$$\bar{I}_i^d(\bar{u}) = r_i \bar{T}^d - u_i + \exp(-r_i \bar{T}^d) \sum_{j=0}^{u_i-1} \frac{(r_i \bar{T}^d)^j}{j!} (u_i - j)$$

ケース② 加工および段取り時間が指数分布に従うとき  
 $d \neq k$  のとき

$$I_i^d(\bar{u}) = \frac{p_d + \lambda_d}{p_d \lambda_d} u_i - \frac{p_d^2 + p_d \lambda_d + \lambda_d^2}{(p_d \lambda_d)^2} r_i \\
+ \frac{r_i}{p_d \lambda_d (p_d - \lambda_d)} (p_d^3 \eta_i^u - \lambda_d^3 \xi_i^u)$$

$$\bar{I}_i^d(u) = \frac{r_i}{p_d \lambda_d (p_d - \lambda_d)} \{ p_d^2 \eta_i^u - \lambda_d^2 \xi_i^u \}$$

$d = k$  のとき

$$I_i^d(\bar{u}) = \frac{u_i}{p_d} - \frac{r_d}{p_d} (1 - \xi_i^u)$$

$$\bar{I}_i^d(\bar{u}) = \frac{r_i}{p_d} \xi_i^u$$

ただし、

$$\eta_i = \frac{r_i}{r_i + \lambda_i}, \quad \xi_i = \frac{r_i}{r_i + p_i}$$

である。

#### 推移確率の計算

ケース①と②の場合について、推移確率  $P(j | u, d)$  も次のように計算することができる。

$p_i(j | \bar{u}, d)$  : 状態  $\bar{u}$  で決定  $d$  を行ったときに、次の決定までに部品  $i$  の在庫量が  $j$  個減少する確率。

とおくと、

$$P(j | \bar{u}, d) = \prod_{i=1}^N p_i(j | \bar{u}, d)$$

となる。以下にケース①とケース②の各  $p_i(j | u, d)$  の計算式を載せておく。

ケース① 加工および段取り時間が一定のとき

$$p_i(j_i; \bar{u}, d) = \begin{cases} \delta_{i,d} & : u_i = 0 \\ \frac{(r_i \bar{T}^d)^{j_i}}{j_i!} \exp(-r_i \bar{T}^d) & : u_i \geq 1, j_i < u_i \\ 1 - \sum_{j=0}^{u_i} \frac{(r_i \bar{T}^d)^j}{j!} \exp(-r_i \bar{T}^d) & : u_i \geq 1, j_i = u_i \end{cases}$$

ケース② 加工および段取り時間が指数分布に従うとき  
 $d \neq k$  のとき

$$p_i(j_i; u, d) = \begin{cases} \delta_{i,d} & : u_i = 0 \\ \frac{p_d \lambda_d}{p_d - \lambda_d} \left\{ \frac{r_i^{j_i}}{(r_i + \lambda_d)^{j_i+1}} - \frac{r_i^{j_i}}{(r_i + p_d)^{j_i+1}} \right\} & : u_i \geq 1, j_i < u_i \\ 1 - \sum_{j=0}^{u_i-1} \frac{p_d \lambda_d}{p_d - \lambda_d} \left\{ \frac{r_i^{j_i}}{(r_i + \lambda_d)^{j_i+1}} - \frac{r_i^{j_i}}{(r_i + p_d)^{j_i+1}} \right\} & : u_i \geq 1, j_i = u_i \end{cases}$$

$d = k$  のとき

$$p_i(j_i; \bar{u}, d) = \begin{cases} \delta_{i,d} & : u_i = 0 \\ p_d \frac{r_i^{j_i}}{(r_i + p_d)^{j_i+1}} & : u_i \geq 1, j_i < u_i \\ \sum_{j=0}^{u_i} p_d \frac{r_i^{j_i}}{(r_i + p_d)^{j_i+1}} & : u_i \geq 1, j_i = u_i \end{cases}$$